

Член-корреспондент НАН Украины Л. П. Хорошун, О. И. Левчук

## Плоская задача о растяжении тела с трещиной для линейно-упрочняющегося материала

*Рассмотрена плоская задача о растяжении тела с трещиной для линейно-упрочняющихся материалов. Методом интегрального преобразования Фурье задача сведена к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для применения численных методов проведена дискретизация полученной системы. На основании численного решения задачи исследовано распределение напряжений и деформаций, зоны пластичности для плоского деформированного и плоского напряженного состояний.*

При рассмотрении задачи о деформировании линейно-упрочняющегося материала с трещиной учет реальной диаграммы деформирования материалов приводит к значительным трудностям вычислительного характера, поэтому используются различные упрощающие предположения, позволяющие их избежать [1–4]. Но возникающие при таких предположениях неограниченные напряжения в вершине трещины противоречат физическим соображениям.

В настоящей работе рассматривается плоская задача о растяжении тела с трещиной для линейно-упрочняющегося материала с постоянным коэффициентом Пуассона. На основе интегрального преобразования Фурье задача сведена к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и проведена их дискретизация для применения численных методов. Получено решение задачи в случае плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Исследованы зоны пластических деформаций, распределение напряжений.

**Основные уравнения и соотношения.** При постоянном коэффициенте Пуассона  $\nu$  зависимости между напряжениями и деформациями можно представить как

$$\sigma_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon) \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right), \quad J_\varepsilon = (\varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij})^{1/2} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Модуль сдвига  $\mu(J_\varepsilon)$  для диаграммы деформирования с линейным законом упрочнения определяется выражением

$$\mu(J_\varepsilon) = \begin{cases} \mu_0, & J_\varepsilon < \frac{k}{2\mu_0}, \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{k}{2J_\varepsilon}, & J_\varepsilon \geq \frac{k}{2\mu_0}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mu_0$ ,  $\mu'$ ,  $k = \sigma_0 \sqrt{2/3}$  — постоянные ( $\sigma_0$  — предел текучести материала).

Введем замену

$$\sigma_{ij} = \bar{\mu} \hat{\sigma}_{ij}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение равновесия, относительно модифицированных напряжений будем иметь

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + \hat{f}_i = 0, \quad \hat{f}_i = \frac{1}{\bar{\mu}} (\hat{\sigma}_{ij} \bar{\mu}_{,j} + F_i), \quad (4)$$

где  $F_i$  — объемные силы. При этом безразмерный модуль сдвига  $\bar{\mu}$ , согласно (2), (3), определяется выражением

$$\bar{\mu}(J_{\hat{\sigma}}) = \begin{cases} 1, & J_{\hat{\sigma}} < k, \\ \bar{\mu}' + (1 - \bar{\mu}') \frac{k}{J_{\hat{\sigma}}}, & J_{\hat{\sigma}} \geq k \end{cases} \quad \left( \bar{\mu}' = \frac{\mu'}{\mu_0} \right). \quad (5)$$

Решение дифференциальных уравнений (4) будем искать в виде суммы  $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^0 + \hat{\sigma}_{ij}^*$ , где  $\hat{\sigma}_{ij}^0$  — решение однородных уравнений (4);  $\hat{\sigma}_{ij}^*$  — частное решение. Для решения однородных уравнений (4) используем функцию напряжений

$$\hat{\sigma}_{11}^0 = \varphi_{,22}, \quad \hat{\sigma}_{22}^0 = \varphi_{,11}, \quad \hat{\sigma}_{12}^0 = -\varphi_{,12}, \quad (6)$$

удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\varphi_{,iijj} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (7)$$

Частное решение неоднородных уравнений (4), которое можно построить методом преобразований Фурье для бесконечной области [1], представляется через интегралы по области  $D$  тела

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^* + \hat{\sigma}_{22}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r)}{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} d\xi_1 d\xi_2, \\ \hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}_{22}^* &= \frac{1-2\hat{\nu}}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) e_{ij}(x_i - \xi_i) \hat{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} (x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2, \\ \hat{\sigma}_{12}^* &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} e_{ij}(x_i - \xi_i) \hat{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (i, j, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $e_{11} = e_{22} = 0$ ,  $e_{12} = -e_{21} = 1$ . В результате приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно модифицированных напряжений  $\hat{\sigma}_{11}$ ,  $\hat{\sigma}_{22}$ ,  $\hat{\sigma}_{12}$ .

**Плоская задача о растяжении тела с трещиной.** Рассмотрим плоскую задачу о распределении напряжений в бесконечном двухмерном теле, ослабленном внутренней трещиной ( $-c \leq x \leq c$ ,  $y = 0$ ), при заданной на бесконечности нормальной равномерно распределенной нагрузке  $p_0$ , действующей вдоль оси  $y$ . В силу симметрии распределения напряжений относительно осей  $x$  и  $y$  достаточно ограничиться первым квадрантом  $D_1$  области тела  $D$ , учитывая при этом влияние остальных квадрантов  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  при построении

частного решения (8). В результате приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \widehat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \widehat{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \widehat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \widehat{\sigma}_{12}^*(x, y) &= \int_{D_1} S_i(x, y; \xi, \eta) \widehat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \left( \widehat{f}_i = \widehat{\sigma}_{ij} \frac{\bar{\mu}_{,j}}{\mu}; i, j = 1, 2 \right),\end{aligned}\tag{9}$$

где функции влияния определяются формулами

$$\begin{aligned}P_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu})} \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_3} + \frac{\alpha_1}{\beta_4} \right); \\ P_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu})} \left( \frac{\alpha_3}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\beta_2} - \frac{\alpha_4}{\beta_3} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} \right), \\ Q_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\widehat{\nu}}{2\pi(1-\widehat{\nu})} \left( \frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right), \\ Q_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\widehat{\nu}}{2\pi(1-\widehat{\nu})} \left( -\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right), \\ S_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\widehat{\nu}}{4\pi(1-\widehat{\nu})} \left( -\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right), \\ S_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\widehat{\nu}}{4\pi(1-\widehat{\nu})} \left( \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right), \\ \alpha_1 &= x - \xi, \quad \alpha_2 = x + \xi, \quad \alpha_3 = y - \eta, \quad \alpha_4 = y + \eta, \\ \beta_1 &= \alpha_1^2 + \alpha_3^2, \quad \beta_2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad \beta_3 = \alpha_2^2 + \alpha_4^2, \quad \beta_4 = \alpha_1^2 + \alpha_4^2, \\ \gamma_1 &= \alpha_1^2 - \alpha_3^2, \quad \gamma_2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \quad \gamma_3 = \alpha_2^2 - \alpha_4^2, \quad \gamma_4 = \alpha_1^2 - \alpha_4^2.\end{aligned}\tag{10}$$

Нагрузку  $p_0$  принимаем меньшей предела текучести  $k$ , приводящую к образованию нелинейной зоны лишь в окрестности трещины, так что на бесконечности, согласно (4), выполняются граничные условия  $\widehat{\sigma}_{22}|_{\infty} = p_0$ ,  $\widehat{\sigma}_{11}|_{\infty} = \widehat{\sigma}_{12}|_{\infty} = 0$ . На оси  $y = 0$  граничные условия

формулируются в виде  $\hat{\sigma}_{22}(x, 0) = 0$  для  $|x| \leq c$ ,  $u_2(x, 0) = 0$  для  $|x| \geq c$ ,  $\hat{\sigma}_{12}(x, 0) = 0$  для  $L_r(i, j, k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1}$ , где  $u_2(x, 0)$  — перемещение вдоль оси  $y$ .

На основе интегрального преобразования [5] решение сформулированной задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11}(x, y) &= \hat{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi)(1 - \xi y)e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi, \\ \hat{\sigma}_{22}(x, y) &= p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi)(1 + \xi y)e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi, \\ \hat{\sigma}_{12}(x, y) &= \hat{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2y}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi)\xi e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi,\end{aligned}\tag{11}$$

где функция  $\tilde{p}(\xi)$  определяется из дуальных интегральных уравнений

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \cos \xi x d\xi = p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x, 0), \quad 0 \leq x \leq c, \quad \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi = 0, \quad x \geq c,\tag{12}$$

при этом перемещение берегов трещины находим согласно выражению

$$u_2(x, 0) = \frac{2(1 - \hat{\nu})}{\pi\mu_0} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi, \quad 0 \leq x \leq c.\tag{13}$$

Таким образом, приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (9)–(12) относительно модифицированных напряжений  $\hat{\sigma}_{11}$ ,  $\hat{\sigma}_{22}$ ,  $\hat{\sigma}_{12}$ .

Численное решение системы (9)–(12) связано с необходимостью определения функции  $\tilde{p}(\xi)$  в пространстве изображений в области  $0 \leq \xi < \infty$ , что существенно усложняет задачу. В связи с этим, учитывая соотношение

$$\tilde{u}_2(\xi, 0) = \frac{1 - \hat{\nu} \tilde{p}(\xi)}{\mu_0 \xi},\tag{14}$$

преобразуем уравнения (11) к виду

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11}(x, y) &= \hat{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \hat{\nu})} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)]u_2(\eta, 0)d\eta, \\ \hat{\sigma}_{22}(x, y) &= p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \hat{\nu})} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)]u_2(\eta, 0)d\eta, \\ \hat{\sigma}_{12}(x, y) &= \hat{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \hat{\nu})} \int_0^c R_3(x, y, \eta)u_2(\eta, 0)d\eta,\end{aligned}\tag{15}$$

где функция  $u_2(\eta, 0)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$p_0 + \widehat{\sigma}_{22}^*(x, 0) = \frac{2\mu_0}{\pi(1-\widehat{\nu})} \int_0^c R(x, \eta) u_2(\eta, 0) d\eta, \quad 0 \leq x \leq c, \quad (16)$$

а ядра определяются формулами

$$\begin{aligned} R(x, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{x-\eta} \right), \\ R_1(x, y, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{x+\eta}{(x+\eta)^2 + y^2} - \frac{x-\eta}{(x-\eta)^2 + y^2} \right], \\ R_2(x, y, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{y(x+\eta)}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{y(x-\eta)}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}, \\ R_3(x, y, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{(x+\eta)^2 - y^2}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{(x-\eta)^2 - y^2}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем безразмерные параметры

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\widehat{\sigma}_{ij}}{k}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^* = \frac{\widehat{\sigma}_{ij}^*}{k}, \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{k}, \quad \bar{u}(\eta, 0) = \frac{2\mu_0 u_2(\eta, 0)}{\pi(1-\widehat{\nu})kc}, \quad (18)$$

тогда соотношения (15) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x, y) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \\ \bar{\sigma}_{22}(x, y) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \\ \bar{\sigma}_{12}(x, y) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) - cy \int_0^c R_3(x, y, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \end{aligned} \quad (19)$$

где функция  $\bar{u}(\eta, 0)$ , как следует из (16), удовлетворяет интегральному уравнению

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) = c \int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \quad 0 \leq x \leq c. \quad (20)$$

При этом частное решение, согласно (9), определяется интегралами

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) &= \int_{D_1} S_i(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \left( \bar{f}_i = \bar{\sigma}_{ij} \frac{\bar{\mu}_{,j}}{\bar{\mu}}, \quad i, j = 1, 2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

**Дискретизация задачи.** Поскольку решить систему интегро-дифференциальных уравнений (19) в аналитическом виде не представляется возможным, воспользуемся численными методами. Для этого необходимо преобразовать (19) из континуальной формы в дискретную. Разобьем интервал  $(0, c)$  на  $N$  частей, представив интеграл в (20) суммой

$$\int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta = \sum_{k=1}^N \bar{u}(x_k, 0) \int_{x_k - a_k}^{x_k + a_k} R(x, \eta) d\eta \quad \left( \sum_{k=1}^N 2a_k = c \right). \quad (22)$$

Учитывая (17), приведем интегральное уравнение (20) относительно  $\bar{u}(\eta, 0)$  к системе алгебраических уравнений

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik} \bar{u}(x_k, 0) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (23)$$

где матрица  $I_{ik}$  с безразмерными элементами определяется формулой

$$I_{ik} = -\bar{a}_k \left[ \frac{1}{(\bar{x}_i + \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} + \frac{1}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} \right] \quad \left( \bar{x}_i = \frac{x_i}{c}; \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}; i, k = 1, \dots, N \right). \quad (24)$$

Аналогично на основе (17), (20) получим представление решения в произвольной точке  $x_i, y_j$  области  $D_1$ , включая границу, через суммы

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{22}(x_i, y_j) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0), \\ \bar{\sigma}_{12}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N I_{ijk}^{(3)} \bar{u}(x_k, 0), \end{aligned} \quad (25)$$

где матрицы  $I_{ijk}^{(1)}, I_{ijk}^{(2)}, I_{ijk}^{(3)}$  определяются формулами

$$\begin{aligned} I_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{r_1^2 + r_5^2} - \frac{r_2}{r_2^2 + r_5^2} + \frac{r_3}{r_3^2 + r_5^2} - \frac{r_4}{r_4^2 + r_5^2} \right), \\ I_{ijk}^{(2)} &= r_5^2 \left[ \frac{r_1}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right], \\ I_{ijk}^{(3)} &= \frac{r_5}{2} \left[ \frac{r_1^2 - r_5^2}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2^2 - r_5^2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3^2 - r_5^2}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4^2 - r_5^2}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right], \\ r_1 &= \bar{x}_i + \bar{x}_k + \bar{a}_k, \quad r_2 = \bar{x}_i + \bar{x}_k - \bar{a}_k, \quad r_3 = \bar{x}_i - \bar{x}_k + \bar{a}_k, \\ r_4 &= \bar{x}_i - \bar{x}_k - \bar{a}_k, \quad r_5 = \bar{y}_j. \end{aligned} \quad (26)$$

Частное решение (21) представляется через двойные суммы по прямоугольным ячейкам области  $D_1$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} [P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) + Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n)] \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n, \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} [P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) - Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n)] \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n, \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n \quad (r = 1, 2).\end{aligned}\tag{27}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) &= cP_r(x_i, y_j; x_k, y_n); & Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) &= cQ_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \\ S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) &= cS_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \\ \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{\bar{\sigma}_{r1}(x_k, y_n)}{\bar{a}_k + \bar{a}_{k+1}} \left[ \frac{\bar{\mu}(x_{k+1}, y_n)}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] + \frac{\bar{\sigma}_{r2}(x_k, y_n)}{\bar{b}_n + \bar{b}_{n+1}} \left[ \frac{\bar{\mu}(x_k, y_{n+1})}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] \right\} \\ &(r = 1, 2).\end{aligned}\tag{28}$$

При этом безразмерные координаты и величины определяются отношениями

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{c}, \quad \bar{y}_j = \frac{y_j}{c}, \quad \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}, \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{c},\tag{29}$$

где  $a_k, b_n$  — половины размеров прямоугольных ячеек области  $D_1$  с координатами центров  $x_k, y_n$ .

Таким образом, при равномерном разбиении области  $D_1$  на квадратные ячейки задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (23), (25) относительно переменных  $\bar{u}(x_k, 0), \bar{\sigma}_{ij}(x_k, y_n), \bar{\sigma}_{ij}^*(x_k, y_n)$ .

**Анализ численных результатов.** В качестве конкретной задачи исследовано напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины для линейно-упрочняющегося материала ( $\mu' = 0,03$ ) с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ . При расчетах половина длины трещины разбивалась на  $N = 200$  одинаковых частей при равномерном разбиении области  $D_1$  с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей, равными  $2a = 1/N = 0,005$  в безразмерных координатах. Нагрузка задавалась в интервале  $0,3 \leq \bar{p}_0 \leq 0,5$ . Для покрытия области нелинейного деформирования задавалось  $30 \times 24$  квадратных ячеек. Нулевым приближением служило решение соответствующей линейной задачи.

На рис. 1 сплошными линиями обозначены зоны пластических деформаций для плоско-напряженного состояния для растягивающих нагрузок  $\bar{p}_0 = p_0/k$ , принимающих значения 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5 при  $\mu' = 0,03$ , штриховыми — зоны, в которых превзойден предел текучести по [6], причем отклонение изменялось от 9,8% при нагрузке  $\bar{p}_0 = 0,3$  до 12,7% при  $\bar{p}_0 = 0,5$ . Отношение поперечных зон пластичности к продольным составляет 0,8–1.

На рис. 2 сплошной линией представлены зависимости нормальных напряжений  $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0) = \sigma_{22}(\bar{x}, 0)/k$  в окрестности трещины от расстояния  $\bar{x} - 1$  до ее вершины для нагрузки  $\bar{p}_0 = 0,5$  плоско-напряженного состояния. Кривая 1 соответствует значению  $\mu' = 0,03$ ,

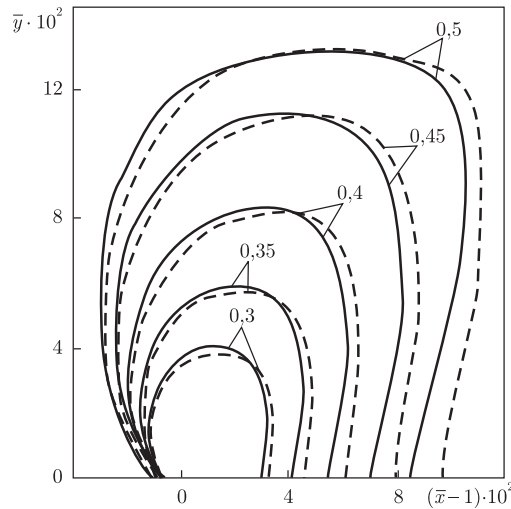


Рис. 1

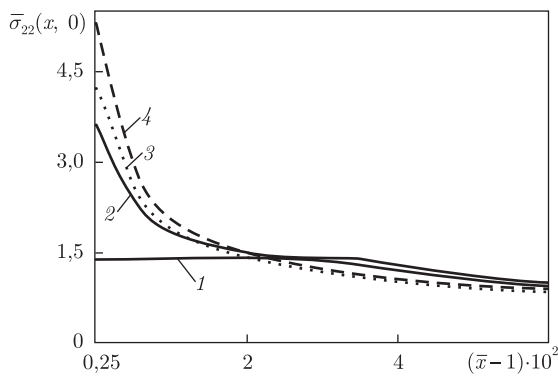


Рис. 2

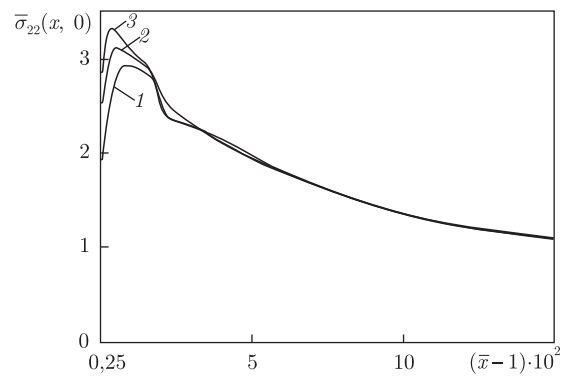


Рис. 3

кривая 2 —  $\mu' = 0$ , кривая 3 отвечает линейно-упругой задаче, кривая 4 — асимптотическому приближению линейно-упругой задачи. Как видно из рисунка, напряжения имеют ограниченное значение и для линейно-упрочняющегося материала. При этом значения нормальных напряжений увеличиваются по сравнению со значением для идеального упруго-пластического материала в 2,6 раза и уменьшаются по сравнению со значением для линейно-упругой задачи на 17%. При удалении от вершины трещины напряжения  $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$  приближаются к соответствующим значениям напряжений для линейной задачи, равным  $\bar{p}_0$  на бесконечности.

На рис. 3 приведены зависимости нормальных напряжений  $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0) = \sigma_{22}(\bar{x}, 0)/k$  для плоского деформированного состояния при различных значениях  $\mu'$  (кривая 1 —  $\mu' = 0$ , кривая 2 —  $\mu' = 0,03$ , кривая 3 —  $\mu' = 0,05$ ) и нагрузке  $\bar{p}_0 = 0,5$ . Как видно из графиков, нормальные напряжения принимают также ограниченные значения при увеличении коэффициента линейного упрочнения.

Таким образом, с помощью численного решения задачи исследованы зоны пластических деформаций, распределения напряжений и деформаций, перемещения берегов трещины. Установлено распределение нормальных напряжений для плоско-напряженного и плоско-деформированного состояний линейно-упрочняющегося материала с трещиной.



1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
2. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. – 1920. – A221. – P. 163–198.
3. Hoyson S. F., Sinclair G. B. On the variability of fracture toughness // Int. J. of Fract. – 1993. – 60. – P. 43–49.
4. Irwin G. P. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // Appl. Mech. – 1957. – 24, No 4. – P. 361–364.
5. Снеддон И. Н., Бери Д. С. Классическая теория упругости. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 219 с.
6. Хорошун Л. П. Дискретизация плоской задачи о растяжении тела с трещиной при нелинейном законе деформирования // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 11. – С. 31–48.

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН України, Киев

Поступило в редакцию 11.05.2012

Член-корреспондент НАН України Л. П. Хорошун, О. І. Левчук

### **Плоска задача про розтяг тіла з тріщиною для лінійно-зміцнюваного матеріалу**

*Розглянуто плоску задачу про розтяг тіла з тріщиною для лінійно-зміцнюваних матеріалів. Методом інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для застосування числових методів проведено дискретизацію отриманої системи. На основі числового розв'язку задачі досліджено розподіл напружень і деформацій, зони пластичності для плоского деформованого і плоского напруженого станів.*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine L. P. Khoroshun, O. I. Levchuk

### **The plane problem of tension of the body with a crack for a linearly strengthening material**

*The plane problem of tension of the body with a crack for a linearly strengthening material is considered. The problem is reduced to the system of nonlinear algebraic equations by the Fourier integral transformation method. For the use of numerical method, the digitization of the obtained system is made. On the basis of the numerical solution, the distributions of stresses and strains and the plasticity zones for the plane stresses and plane strained states are investigated.*